

ОБ УДВОЕНИИ ЧИСЛА ЗАРАЖЕННЫХ

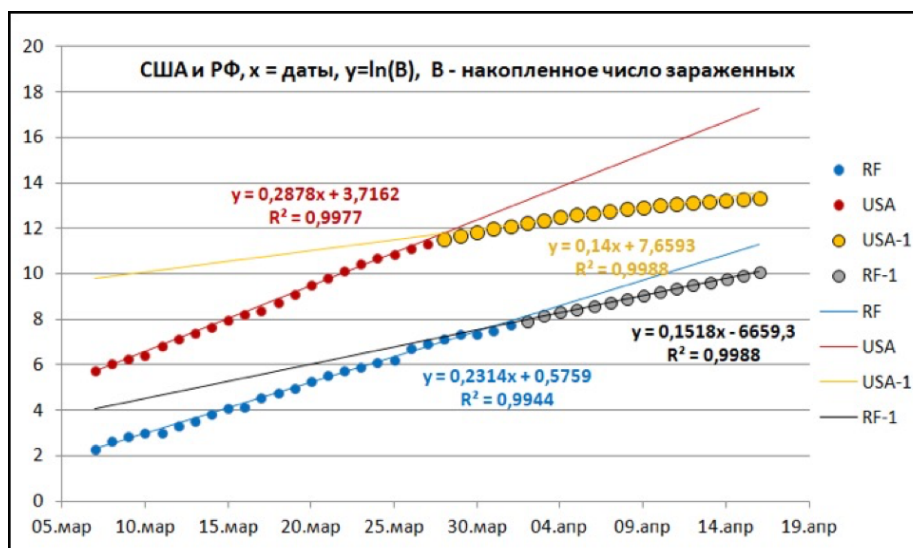
Георгий Сатаров

Любой экспоненциальный рост со временем чего бы то ни было – числа бактерий в питательной среде, числа инфицированных больных при пандемии, количества ядер урана при цепной ядерной реакции – обладает уникальной особенностью. Его (рост) можно описать удобной характеристикой. Зададимся некоторым коэффициентом – во сколько раз увеличивается количество того, что растет. Ну допустим – в два раза. Два – это удобно. Допустим, что за некоторый промежуток времени, скажем, 6 дней, число инфицированных выросло в два раза. Это значит, что и за предыдущий, и за последующий промежуток времени длиной в 6 дней количество инфицированных вырастет в два раза. Это свойство экспонент. Назовем этот промежуток «период удвоения».

Если у нас есть три последовательных промежутка времени длиной 6 дней каждый (итого – 18 дней), то за эти 18 дней количество инфицированных вырастет в 8 раз – два в третьей степени равно восьми. Теперь представим, что период удвоения равен трем дням (в два раза короче предыдущего периода). Тогда в интервале в 18 дней помещается шесть периодов удвоения. Два в шестой степени равно 64. Значит за те же 18 дней число инфицированных вырастет в 64 раза (вместо восьми). Вдумайтесь: мы сократили период удвоения в два раза, а число инфицированных выросло в 8 раз. Вот что такое этот бешеный, стремительный экспоненциальный рост.

Мы будем использовать термин *стремительность* экспоненциального роста, сравнивая разные случаи такого роста. Период удвоения – один из показателей стремительности. Чем меньше период, тем стремительней рост. И очень наглядная единица измерения – дни. И полезная характеристика. Ведь дни – это то, что приходится принимать во внимание, принимая управленческие решения.

Теперь воспользуемся Рисунком 2 из пояснительного текста к базовой диаграмме этого раздела, опубликованной 17 марта. Мы логарифмируем число инфицированных и откладываем полученное значение на вертикальной оси. Поскольку мы логарифмируем экспоненту, то вместо нее мы получаем прямую и можем аккуратнее изучать характер роста, видеть то, что не видно при взглядах на стремительные экспоненты. Точно также трудно разглядеть птицу, когда она быстро проносится у вас перед глазами (лучше бы прологарифмировать). Вот эта диаграмма:



Вы видите на диаграмме, например, запись уравнения прямой $y = 0,2878x + 3,7162$. Это уравнение регрессии, описывающей зависимость между моментом времени (дни) и натуральным логарифмом накопленного числа инфицированных на этот день в США в промежутке между 7 марта и 27 марта. Наш прием удобен тем, что тогда мы можем сказать, что если вернуться назад к экспоненте, но не к собранным данным, а к их аппроксимации экспонентой, то ее вид будет нам известен:

$$B = e^{0,2878x + 3,7162}.$$

Итак, все разнообразие стремительных экспоненциальных ростов пандемий может быть описано двумя константами – коэффициентом при x (дни) и свободным членом. Можно подозревать, что, используя эти данные, можно вычислить для любого экспоненциального роста период удвоения. Это и вправду можно, и даже очень просто. Я не буду развлекать вас выкладками из школьного курса алгебры, а сразу приведу конечный результат. Давайте для общего случая обозначим коэффициент при x через λ . Период удвоения обозначим через T . Тогда последняя величина определяется по формуле:

$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Вот и все. Кстати, это значит, что коэффициент при днях λ тоже является измерителем стремительности роста экспоненты. Только ее смысл не так ясен, как для периода удвоения. Кроме того, чем больше λ , тем стремительнее рост экспоненты.

Давайте применим эту формулу для данных о четырех экспонентах, приведенных выше на использованной мной диаграмме для России и США до и после использованных в двух странах мерах по ограничению распространению коронавируса. Вычисленные значения периода удвоения в днях я помещу ниже в простую табличку. (Последний столбец прокомментирую позже).

	До мер	После	Падение
Россия	3,00	4,49	1,50
США	2,41	4,95	2,06

Что мы видим с помощью этой таблицы? До принятия административных мер период удвоения в США был меньше, чем в России. Т.е. рост числа зараженных в США был стремительнее. После принятия административных мер в США рост стал менее стремительным, чем в России. В третьем столбце («Падение») стоит отношение второго числа в строке к первому числу – во сколько раз увеличился период удвоения экспоненты после принятия административных мер. Мы видим, что в России он увеличился в полтора раза, а в США – в два раза. Можно выдвинуть гипотезу. Что такое изменение свидетельствует о том, что в США предпринятые меры оказались более действенными, сильнее ударили по заразе, чем в России. Но пока это только гипотеза. Она должна проверяться на более представительной выборке стран, что мы и намерены делать.

И конечно, мы постараемся разобраться, почему одни меры оказались более действенны, чем другие. Это ведь может зависеть не только от самих мер, но и от стран. Страны, как люди, а может даже, еще сложнее. И разные меры могут действовать по-разному в разных странах, в

зависимости и от мер, и от институциональных особенностей государств, и от состояния обществ в этих странах. Мы попытаемся в этом разобраться в нашем проекте.

В заключение мы хотим вам помочь, если вы сами будете как-то определять характеристики роста эпидемий на стадии экспоненциального роста и будете вычислять свои лямбда. Тогда приведенная ниже табличка позволит по лямбда сразу определять период удвоения. Например, если вы определили, что λ оказалось равно примерно 0,23, вы найдете это число в пятом столбце верхней части таблицы и правее увидите, что период удвоения равен 3 дня.

Таблица 2. Значения показателей экспоненциального роста λ и соответствующих им периодов удвоения T

λ	T	λ	T	λ	T	λ	T
0,01	69,3	0,11	6,3	0,21	3,3	0,31	2,2
0,02	34,7	0,12	5,8	0,22	3,2	0,32	2,2
0,03	23,1	0,13	5,3	0,23	3,0	0,33	2,1
0,04	17,3	0,14	5,0	0,24	2,9	0,34	2,0
0,05	13,9	0,15	4,6	0,25	2,8	0,35	2,0
0,06	11,6	0,16	4,3	0,26	2,7	0,36	1,9
0,07	9,9	0,17	4,1	0,27	2,6	0,37	1,9
0,08	8,7	0,18	3,9	0,28	2,5	0,38	1,8
0,09	7,7	0,19	3,6	0,29	2,4	0,39	1,8
0,10	6,9	0,20	3,5	0,30	2,3	0,40	1,7